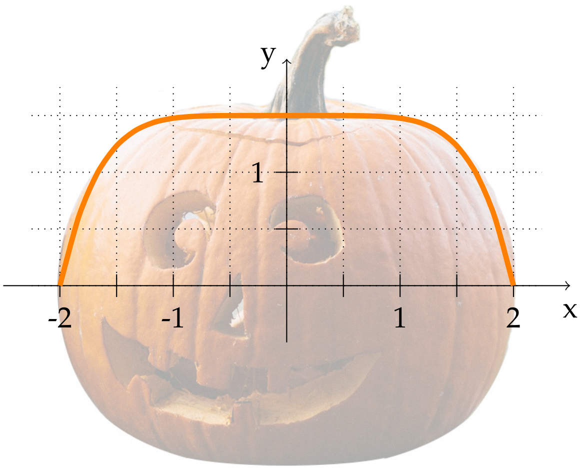
Halloween Special

Exkurs zum Volumen eines Rotationskörpers mit Pumpkin Spice

Im folgenden soll das Volumen des rechten Kürbisses näherungsweise bestimmt werden. Dabei gehen wir von einer Symmetrie zur vertikalen mittigen Schnittebene und einer Rotationssymmetrie durch den Stumpf aus. Dazu versuchen wir, die obere Hälfte

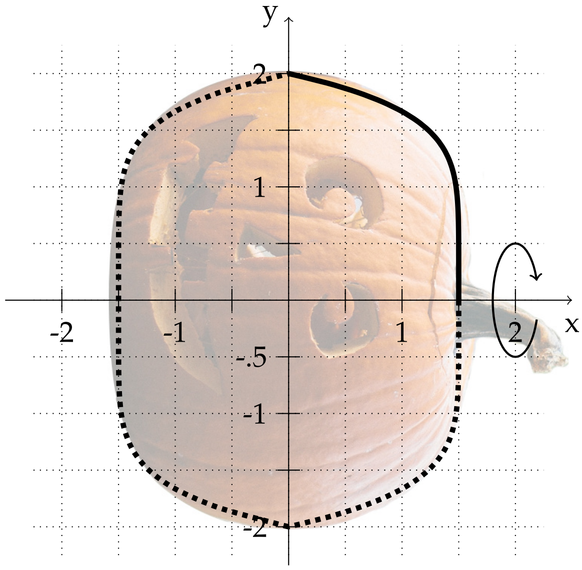
durch eine Funktion zu beschreiben. Den Kürbis passen wir dazu so in das Koordinatensystem ein, dass er einen Durchmesser von 4 LE hat:



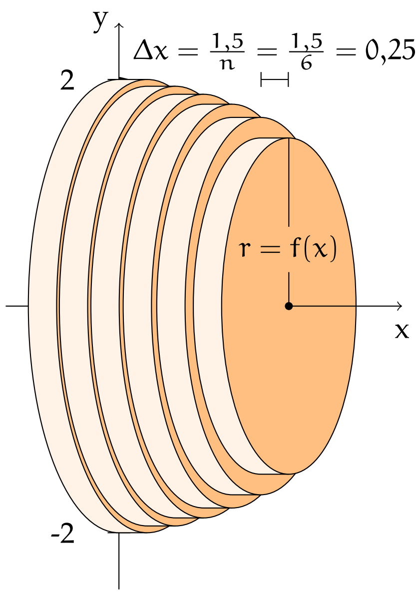
Aus praktischen Gründen soll dies durch eine einfache Polynomfunktion sechsten Grades erfolgen:

$$k(x) = ax^6 + c$$

Diskutieren Sie die Wahl der Modellfunktion und bestimmen Sie die Parameter a und c! Die Funktion bietet eine anschaulich gute Kontur. Zur einfacheren Bestimmung des Volumens lassen wir den Körper an der x-Achse rotieren. Dazu benötigen wir die Umkehrfunktion $f : x \mapsto k^{-1}(x)$ für $x \in [0; 1{,}5]$. Bestimmen Sie diese Umkehrfunktion!



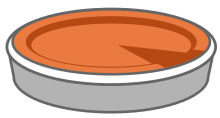
Um das Volumen der rechten Hälfte zu berechnen, könnten wir den Kürbis in $n = 6$ Scheiben schneiden und mit Zylinder annähern:



$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(i \cdot \Delta x\right)\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Die Struktur dieser Summe kommt doch sehr bekannt vor! Leiten Sie sich die davon ausgehend die allgemeine Volumenformel für solche Rotationskörper her und bestimmen Sie damit abschließend das Volumen des ganzen Kürbisses!

Lösungshinweis

9 × 

Kommentar

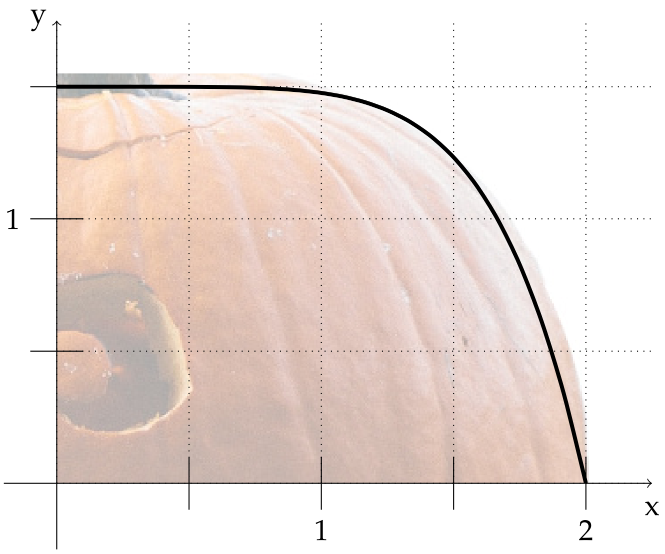
Bisher hatte man nur die Möglichkeit, den Kürbis mit einer Kugel oder eines Zylinders anzunähern. Jetzt in der Oberstufe kann man eine weitere Herangehensweise den Schülern zumindest aufzeigen. Dabei wird das Volumen ähnlich wie die Fläche als Grenzwert unendlicher Schnitte hergeleitet. Daher wird auch die Rotation um die x-Achse gewählt, um die Ähnlichkeit zur Herleitung des Integrals zu erhöhen. Zudem ergibt sich auch eine sinnvolle Anwendung der Umkehrfunktion.

Modellfunktion

Da der Kürbis recht flach oben ist, bietet sich eine Polynomfunktion höheren Grades an. Um die Funktion möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns auf die zwei angegebenen Glieder, die mindestens notwendig sind. Um die Parameter zu bestimmen, sind die beiden Punkte $(0 \mid 1{,}5)$ und $(2 \mid 0)$ prädestiniert. Damit ist sofort $c = 1{,}5$ klar und man berechnet noch

$$0 = a \cdot 2^6 + 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{128} = a$$

Die Funktion liefert damit eine anschaulich gute Näherung an die Kontur des Kürbisses:



Für die Umkehrfunktion ergibt sich:

$$x = -\frac{3}{128}y^6 + 1{,}5$$
$$\sqrt[6]{\frac{128}{3}(1{,}5 - x)} = y$$

Volumen

Aus der Annäherung durch die Scheiben mit

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} (f(i \cdot \Delta x))^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

sollte in Erinnerung an die Herleitung des Integrals über die Ober- und Untersumme der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(i \cdot \Delta x))^2 \cdot \pi \cdot \Delta x = \int_0^{1,5} (f(x))^2 \cdot \pi \cdot dx$$

offensichtlich sein. Damit hat man die allgemeine Formel

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

zur Bestimmung des Volumens parat. Für das Volumen des ganzen Kürbisses ergibt sich dann

$$V \approx 2\pi \int_0^{1,5} (f(x))^2 dx =$$
$$= 2\pi \int_0^{1,5} \left(\sqrt[6]{64 - \frac{128}{3}x}\right)^2 dx =$$
$$= 2\pi \int_0^{1,5} \left(64 - \frac{128}{3}x\right)^{\frac{1}{3}} dx =$$
$$= 2\pi \left[\frac{3}{4}\left(64 - \frac{128}{3}x\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)\right]_0^{1,5} =$$
$$= 2\pi \left[0 - \frac{3}{4}(64)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)\right] =$$
$$= 2\pi \left[\frac{9}{2}\right] = 9\pi$$

Der Lösungshinweis steht für $9 \times$ Pie (Pumpkin Pie) als Wortspiel für die Lösung.